Ejemplos de la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas.

(a) Potencial unidimensional.
Sea el potencial de tal manera que $\varphi_e = \varphi_e(x)$. Entonces la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{d^2\varphi_e}{dx^2}=0 \qquad 49$$

con una solución

$$\varphi_e = A + Bx \qquad 50$$

En la ecuación (50), A y B son constantes arbitrarias a ser evaluadas del conocimiento de las condiciones de borde. Si se requiere que $\varphi_e(x)$ sea finito para todo x , y si $|x|\to\infty$, luego $B\equiv 0$. De otro modo, por supuesto, el potencial sería ilimitado mientras $|x|\to\infty$. La definición de cero potencial es el potencial en $|x|=\infty$. Con $B = 0$, la ecuación (50) se reduce a

$$\varphi_e(x)=A(-\infty\leqslant x\leqslant\infty) \qquad 51$$

Si $\lim_{x\to\infty}\varphi_e(x)$ es la referencia de cero nivel de potencial, entonces $A = 0$. Se ve, entonces, que una función de potencial unidimensional requerida a ser finita para todo x y con la infinidad como el nivel de cero potencial es tal que

$$\varphi_e(x)\equiv 0(-\infty\leqslant x\leqslant\infty) \qquad 52$$

Este problema es bastante trivial.
Ahora, supóngase que se da la solución (50) con las condiciones de que $\varphi_e(x)$ se define sólo en $0\leqslant x\leqslant l$, y además que

$$\varphi_e(0)=V_0$$

y

$$\varphi_e(l)=0 \qquad 53$$

La condición $\varphi_e(0)=V_0$ resulta en

$$A=V_0$$

La condición $\varphi_e(l)=0$ resulta en

$$A+Bl=0$$

o

$$B=-\frac{V_0}{l}$$

Entonces, la ecuación (50) se vuelve

$$\varphi_e=V_0\left(1-\frac{x}{l}\right) \qquad 54$$

Como otro ejemplo, sean las condiciones de borde dadas por

$$\begin{aligned}\varphi_e(0)&=V_0\\ \varphi_e(l)&=V_1\end{aligned} \qquad 55$$

en el rango $0\leqslant x\leqslant l$. Las constantes A y B pueden ser evaluadas con el resultado

$$\varphi_e(x)=V_0+\frac{1}{l}(V_1-V_0)x \qquad 56$$

(b) Potencial bidimensional.
Sea el potencial una función $\varphi_e=\varphi_e(x,y)$. La ecuación de Laplace es ahora

$$\nabla^2\varphi_e=\frac{\partial^2\varphi_e}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_e}{\partial y^2}=0 \qquad 57$$

La solución de (57) es de la forma de (43a) pero con $n=0$. De esta manera,

$$\varphi_e(x,y)=(A\operatorname{sen}lx+B\cos lx)(C\operatorname{senh}ly+D\cosh ly) \qquad 58$$

La restricción $l^2+m^2=0$ ha sido invocado de manera que las funciones $\operatorname{sen}my$ y $\cos my$ en la ecuación (58) se vuelven, aparte de constantes, en $\operatorname{senh}my$ y $\cosh my$ respectivamenta. La forma de la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares bidimensionales es como la dada en la ecuación (58). Puesto que la ecuación (57) es una ecuación lineal, una superposición de soluciones de tipo de (58) es también una solución de la ecuación (57).
La solución completa formal de la ecuación (57) luego es

$$\varphi_e(x,y)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_l\operatorname{sen}lx+B_l\cos lx)(C_l\operatorname{senh}ly+D_l\cosh ly) \qquad 59$$

Queda la cuestión de evaluar las constantes en (59) al aplicar el juego de condiciones de borde. Supóngase que $\varphi_e(x,y)$ se determinará en la región rectangular $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$ con las cuatro condiciones de borde.

cb 1 $\varphi_e(0, y)=0 \quad ; \quad 0 \leqslant y \leqslant b$
cb 2 $\varphi_e(a, y)=0 \quad ; \quad 0 \leqslant y \leqslant b$
cb 3 $\varphi_e(x, b)=0 \quad ; \quad 0 \leqslant x \leqslant a$
cb 4 $\varphi_e(x, 0)=V_0 \quad ; \quad 0 \leqslant x \leqslant a$ 60

La figura 1 ilustra el problema. Se debe requerir que la solución de la ecuación (59) obedezca las condiciones (60).

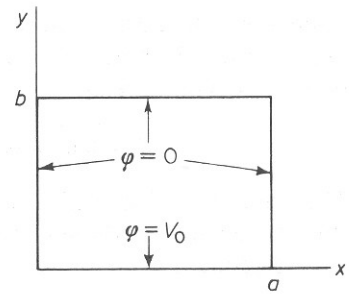

Figura 1.
Potencial en el canal rectangular.

cb 1 – Al sustituir $x = 0$ en (59), se tiene

$$\varphi_e(0, y)=\sum_{l=0}^{\infty} B_l(C_l \operatorname{senh} ly+D_l \cosh ly) \tag{61}$$

Pero $\varphi_e(0, y)=0$ para todo y. La única manera que la mano derecha de (61) pueda ser idénticamente cero para todo l y todo y es si las constantes $B_l \equiv 0$ para todo y. Consecuentemente, la solución de (59) que obedezca la condición $\varphi_e(0, y)=0$ para todo y es

$$\varphi_e(x, y)=\sum_{l=0}^{\infty} \operatorname{sen} lx(C'_l \operatorname{senh} ly+D'_l \cosh ly) \tag{62}$$

Aquí, $C'_l=A_l C_l$ y $D'_l=A_l D_l$ quedan como constantes arbitrarias.

cb 2 – Al sustituir $x = a$ en (62), se tiene

$$\varphi_e(a, y) \equiv 0=\sum_{l=0}^{\infty} \operatorname{sen} la(C'_l \operatorname{senh} ly+D'_l \cosh ly) \tag{63}$$

La única manera que la mano derecha de (63) pueda ser idénticamente cero para todo y es si cada término de la serie desaparezca idénticamente. Si n es un entero y si

$$\operatorname{sen} la=\operatorname{sen} n\pi \equiv 0 \tag{64}$$

la condición $\varphi_e(a, y) \equiv 0$ se satisface. Pero la igualdad de (64) implica que

$$l=\frac{n\pi}{a} \qquad 65$$

La solución parcial de (59) al satisfacer la primera y segunda condiciones de borde es

$$\varphi_e(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\left(C'_l\operatorname{senh}\frac{n\pi y}{a}+D'_l\cosh\frac{n\pi y}{a}\right) \qquad 66$$

Quedan dos condiciones por las cuales C'_l y D'_l pueden evaluarse.

cb 3 – Al sustituir $y = b$ en (66) con $\frac{n\pi}{a}=l$ como antes, se tiene

$$\varphi_e(x,b)\equiv 0=\sum_{l=0}^{\infty}\operatorname{sen} lx(C'_l\operatorname{senh} lb+D'_l\cosh lb) \qquad 67$$

Si la ecuación (67) se satisface para todo x, entonces

$$C'_l=-D'_l\coth lb \qquad 68$$

Como con las anteriores condiciones, la solución al satisfacer las tres condiciones de borde es

$$\begin{aligned}\varphi_e(x,y)&=\sum_{l=0}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\left(-D'_l\coth\frac{n\pi b}{a}\operatorname{senh}\frac{n\pi y}{a}+D'_l\cosh\frac{n\pi y}{a}\right)\\ &=\sum_{l=0}^{\infty}D'_l\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\left(\cosh\frac{n\pi y}{a}-\coth\frac{n\pi b}{a}\operatorname{senh}\frac{n\pi y}{a}\right)\end{aligned} \qquad 69$$

cb 4 – Al sustituir y =0 en (69) con $\frac{n\pi}{a}=l$ como antes, se tiene

$$\varphi_e(x,0)=V_0=\sum_{l=0}^{\infty}D'_l\operatorname{sen} lx \qquad 70$$

Finalmente se debe evaluar D'_l de (70). Para lograr la evaluación de D'_l se multiplica ambos lados de (70) por $\operatorname{sen} kx$ e integrar sobre el rango de x (entre 0 y a). El resultado es

$$V_0\int_0^a\operatorname{sen} kx\,dx=\sum_{l=0}^{\infty}D'_l\int_0^a\operatorname{sen} lx\operatorname{sen} kx\,dx \qquad 71$$

La mano derecha de (71) es idénticamente igual a cero a menos que $l = k$. Pero esto significa que la suma sobre l colapsa a un término por lo cual $l = k$. Además, para $l = k$,

$$\int_0^a \operatorname{sen}^2 kx\, dx = a/2$$

mientras

$$\int_0^a \operatorname{sen} kx\, dx = -\frac{1}{k}(\cos ka - 1)$$

Entonces,

$$D'_k = -\frac{2V_0}{ka}(\cos ka - 1)$$

donde $k = l = \frac{n\pi}{a}$ por la ecuación (65). El coeficiente $D'_k \equiv D_n$ se vuelve

$$D_n = \frac{2V_0}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

o

$$D_n = \frac{4V_0}{n\pi} \text{ para } n \text{ impar} \qquad 72$$
$$D_n = 0 \qquad \text{para } n \text{ par}$$

Al sustituir los valores en (65), (68) y (72) en la ecuación (61), se encuentra que el potencial $\varphi_e(x, y)$ es

$$\varphi_e(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \left(\cosh \frac{n\pi y}{a} - \coth \frac{n\pi b}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a} \right) \qquad 73$$

La solución se ve algo complicada, pero las condiciones de borde han causado tales complicaciones. La ecuación (73) sigue siguiendo una sumatoria de soluciones de la forma de (58) y nada más que eso.

A continuación, se da un ejemplo final de una distribución bidimensional de potencial. Sea la región en la cual se determinará el potencial $0 \leqslant x \leqslant a$ y $-\infty \leqslant y \leqslant \infty$. Los puntos $M = lim|y| \to \infty$ serán tomados como el nivel de referencia de cero potencial. Sean las c. b. como siguen:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_e(0,y)=0\\ \varphi_e(a,y)=0\end{array}\right. \text{(para todo } y\text{)} \qquad 74$$
$$\varphi_e(x,0)=f(x)[f(x)\text{conocida}]$$

La solución general es todavía de la forma de (58). Sin embargo, puesto que las funciones hiperbólicas de seno y coseno son ilimitadas para $|y|\to\infty,$ es necesario encontrar una combinación lineal de tales funciones que tienden a cero mientras $|y|\to\infty.$ La identidad

$$A\,\text{senh}\,ly+B\cosh ly=\frac{1}{2}\left[e^{ly}(A+B)-e^{-ly}(A-B)\right] \qquad 75$$

es útil para encontrar la combinación requerida. Si la mano derecha debe acercarse a cero mientras $y\to\infty,$ $A=-B$ es un requerimiento. Si mientras $y\to-\infty$, la mano derecha debe acercarse a cero, entonces $A = B$ es un requerimiento. Así, hay dos diferentes soluciones para φ_e según $y>0$ y/o $y<0$. Para $y>0,$

$$\varphi_e(x,y)=e^{-ly}(A_l\,\text{sen}\,lx+B_l\cos lx) \qquad 76$$

mientras para $y<0,$

$$\varphi_e(x,y)=e^{ly}(A_l\,\text{sen}\,lx+B_l\cos lx) \qquad 77$$

Pero las ecuaciones (76) y (77) pueden combinarse en una relación única al escribir

$$\varphi_e(x,y)=e^{-l|y|}(A_l\,\text{sen}\,lx+B_l\cos lx) \qquad 78$$

que es válida en $-\infty\leqslant y\leqslant\infty.$
Ahora se necesita aplicar las condiciones restantes de (74) para evaluar las constantes l, A_l y B_l. De la c.b.

$$\varphi_e(0,y)=0 \quad \text{(para todo } y\text{)}$$

sigue que

$$B_l\equiv 0 \quad \text{(cada valor de } l\text{)} \qquad 79$$

Del hecho que $\varphi_e(a,y)=0$ para todo y, sigue que

$$\text{sen}\,la=\text{sen}\,n\pi \quad n \text{ un entero}$$

o que

$$l=\frac{n\pi}{a} \qquad 80$$

Finalmente, al aplicar la condición que

$$\varphi_e(x,0)=f(x)$$

Se tiene, al sumar soluciones del tipo de (78),

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \qquad 81$$

Se observa que la ecuación (78) es idéntica en forma con (70). Sigue, entonces, que

$$A_n=\frac{a}{2}\int_0^a \operatorname{sen} \frac{n\pi x'}{a} f(x')\,dx' \qquad 82$$

Al utilizar las ecuaciones (80) y (82), junto con la condición que $B_l \equiv 0$, la expresión (76) se vuelve

$$\varphi_e(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}|y|} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x') \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\,dx' \qquad 83$$

Se debe enfatizar que la ecuación (83) es una representación válida para el potencial de cualquier $f(x')$ por el cual la integral existe.

(c) El caso tridimensional.
Aquí la solución requerida es la suma de términos del tipo dado por la ecuación (43a); es decir,

$$\begin{gathered}\varphi_e(x,y,z)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_n \operatorname{senh} nz+B_n \cosh nz)\\(C_m \operatorname{sen} my+D_m \cos my)(E_l \operatorname{sen} lx+F_l \cos lx)\end{gathered} \qquad 84$$

La condición de la ecuación (40) también debe satisfacerse. Las seis constantes arbitrarias se evaluarán por medio de las condiciones de borde prescritas. Se requiere encontrar el potencial en el volumen $0\le x\le a$, $0\le y\le b$ y $0\le z\le c$. Como un juego de condiciones de borde, se puede requerir que

$$\begin{aligned}&\varphi_e(0,y,z)=\varphi_e(a,y,z)=0\\&\varphi_e(x,0,z)=\varphi_e(x,b,z)=0\\&\varphi_e(x,y,0)=V_0;\varphi_e(x,y,c)=0\end{aligned} \qquad 85$$

Físicamente, el problema es encontrar el potencial en una caja de dimensiones *a*, *b*, *c*, dado que el plano *x* - *y* en *z* = 0 se mantiene a un potencial constante V_0, mientras las restantes caras están aterradas. La situación se muestra en la figura 2.

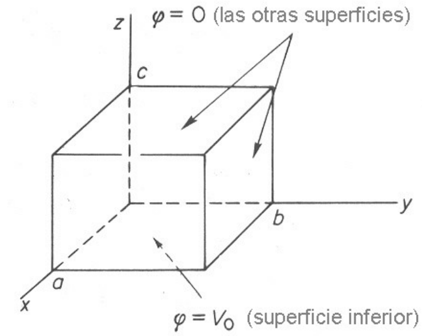

Figura 2.
El potencial en una caja rectangular.

La condición que $\varphi_e(0,y,z)=0$ significa que todo $F_l\equiv 0$. El hecho de que $\varphi_e(x,0,z)=0$ requiere que todo $D_m\equiv 0$. Al sustituir $E_l C_m A_n = A'_{l,m}$ y $E_l C_m B_n = B'_{l,m}$ se tiene

$$\varphi_e(x,y,z)=\sum_{l,m,n}\operatorname{sen} my\operatorname{sen} lx\,(A'_{l,m}\operatorname{senh} nz+B'_{l,m}\cosh nz) \qquad 86$$

El hecho de que A' y B' dependen sólo de l y m se debe al hecho que la ecuación (40) debe satisfacerse, y la ecuación (40) requiere que n depende de l y m. La condición $\varphi_e(a,y,z)=0$ para todo de y y z es equivalente, como antes, al requerimiento que

$$\operatorname{sen} la\equiv 0$$

o que

$$l=\frac{p\pi}{a} \quad (p \text{ un entero}) \qquad 87$$

De manera similar, se infiere de la información $\varphi_e(x,b,z)=0$ para todo x y z que

$$m=\frac{q\pi}{b} \quad (q \text{ un entero}) \qquad 88$$

El hecho que $\varphi_e(x,y,0)=V_0$ conduce a la ecuación

$$V_0=\sum_{p,q}\operatorname{sen}\frac{p\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{q\pi y}{b}B_{pq} \qquad 89$$

La sumatoria es ahora sobre p y q por virtud de las ecuaciones (87) y (88).
El requerimiento que $\varphi_e(x,y,c)=0$ para todo x y y se satisface si

$$A'_{pq}\operatorname{senh} nc+B'_{pq}\cosh nc=0$$

o, de forma equivalente, si

$$A'_{pq} = -B'_{pq} \coth nc \qquad 90$$

Para encontrar B'_{pq}, se multiplica cada lado de la ecuación (89) por $\operatorname{sen} k\pi x/a$ y $\operatorname{sen} l\pi y/b$, donde k y l son enteros fijos. Al integrar sobre x y y, se obtiene el resultado

$$V_0 \int_0^a \operatorname{sen} \frac{k\pi x'}{a} dx' \int_0^b \operatorname{sen} \frac{l\pi y'}{b} dy' = \sum_{p,q} B_{pq}$$
$$\int_0^a \operatorname{sen} \frac{p\pi x'}{a} \operatorname{sen} \frac{k\pi x'}{a} dx' \int_0^b \operatorname{sen} \frac{q\pi y'}{b} \operatorname{sen} \frac{l\pi y'}{b} dy'$$

A menos que $p = k$ y $q = l$, la mano derecha desaparece una vez más. La suma doblemente infinita luego se reduce a un solo término por lo cual $p = k$ y $q = l$. Así,

$$V_0 \int_0^a \operatorname{sen} \frac{k\pi x'}{a} dx' \int_0^b \operatorname{sen} \frac{l\pi y'}{b} dy' = B_{kl} \int_0^a \operatorname{sen}^2 \frac{p\pi x'}{a} dx' \int_0^b \operatorname{sen}^2 \frac{q\pi y'}{b} dy' \qquad 91$$

Evaluación de las integrales da el resultado

$$B_{kl} = \frac{4V_0}{kl\pi^2}(1-\cos k\pi)(1-\cos l\pi) \qquad 92$$

lo cual se vuelve, al poner $p = k$ y $q = l$,

$$B_{pq} = \frac{16V_0}{pq\pi^2} \quad (\text{para } p \text{ y } q \text{ impar})$$

$$B_{pq} = 0 \qquad (\text{si no}) \qquad 93$$

Finalmente la condición de la ecuación (40) significa que

$$n^2 = m^2 + l^2$$

o

$$n = \pi\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + \frac{p^2}{a^2}} \qquad 94$$

Cuando los resultados de las ecuaciones (88), (89) (90) y (93) se sustituyen en la ecuación (86), la expresión para el potencial $\varphi_e(x, y, z)$ se vuelve

$$\varphi_e(x,y,z)=\frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{p\ \text{impar}}\sum_{q\ \text{impar}}\frac{1}{pq}\operatorname{sen}\frac{p\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{q\pi y}{b}(-\operatorname{senh} nz\coth nc+\cosh nz) \tag{95}$$

Es fácil ver que si una condición de borde se hubiera dado en z =0 que dijera

$$\varphi_e(x,y,0)=f(x,y)$$

donde $f(x,y)$ es conocida, se hubiera tenido en lugar de la ecuación (93) la expresión

$$B_{pq}=\frac{4V_0}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x',y')\operatorname{sen}\frac{p\pi x'}{a}\operatorname{sen}\frac{q\pi y'}{b}dx'dy'$$

con las demás condiciones quedando exactamente igual que antes. El potencial $\varphi_e(x,y,z)$ sería

$$\varphi_e(x,y,z)=\frac{4}{ab}\sum_p\sum_q\operatorname{sen}\frac{p\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{q\pi y}{b}\cosh nz(1-\tanh nz\coth nc)I \tag{96}$$

donde

$$I=\int_0^a\int_0^b f(x',y')\operatorname{sen}\frac{p\pi x'}{a}\operatorname{sen}\frac{q\pi y'}{b}dx'dy'$$